ИДЕИ ОБ УВЕЛИЧЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧАСТЬ IA. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ I ПОРЯДКА*

А.А. Ахундов[1], Э.М. Ахундова[1]

[1]Институт Систем Управления НАНА, Баку, Азербайджан
e-mail: akhundov_a@rambler.ru , ema1948@mail.ru

Резюме: В теории дифференциальных уравнений классический математический подход, основанный еще со времен Ньютона и Лейбница на определенных базисных положениях, не очень приспособлен для приемлемо адекватного описания турбулентных явлений. Для исправления этой ситуации в работе введены новые базисные положения, которые в частном предельном случае совпадают с классическими положениями. В новых положениях более полно учитываются линейные размеры объектов. Любая траектория (даже точечно-разрывная), принадлежащая следу движения «размерного» объекта в пространстве названа универсальной траекторией. Введено понятие функции управления, по зависящему от нас выбору которой однозначно определяется универсальное решение дифференциального уравнения. В работе на основе открывшихся в связи с этим новым возможностям сформулированы три, на наш взгляд, важные проблемы. Решения этих проблем подразумевают активное использование понятия об универсальном решении, избавляющего нас от “проклятия” негладкости, столь затрудняющего изучение турбулентных явлений. При исследовании уже первой проблемы подтвердилось, что понятия универсального решения и функции управления открывают качественно новые возможности также для расширения прикладного значения классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Часть полученных в этом направлении результатов ранее были опубликованы. Эти результаты мы приведем в следующей части IB.

Ключевые слова: Турбулентность, Дифференциальное уравнение, Базисные положения, След движения объекта, Вложенный объем, Универсальное решение.

AMS Subject Classification: 93A30, 97M10.

1. Введение.

Обозначения: I – вложенный отрезок, Δ – половина длины отрезка, I, R^1 – поле вещественных чисел, $\mu = \mu(t)$ – функция управления, $z_\mu(t)$ – универсальное решение, t – время и $t \in T = [t_0, t_1]$. Для краткости записи полагаем, что символ (cN) равносилен выражению (см. комментарий N). Там, где это было возможно, мы, ради сохранения общности рассуждений

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 24.12.2019

старались не акцентировать внимание на типе и размерности используемого пространства.

Данная работа является начальной в ряду будущих работ, глобально нацеленных на разработку нового математического подхода для изучения турбулентных явлений. Локально общая цель этих работ заключается в описании и обосновании законности определенных новых идей, вносящих изменения в некоторые базисные основы теории дифференциальных уравнений с тем, чтобы открыть путь к увеличению прикладных возможностей этой теории. На пути к этой цели, казалось бы, у нас есть серьезное ограничение. А именно, как известно, пригодность дифференциального уравнения, применяемого для описания конкретного процесса, определяется согласно требованию об адекватности (c1). Возникает вопрос. Если какое-либо уравнение адекватно описывает некоторый процесс, то как же можно внести какие-либо изменения в базисные основы теории дифференциальных уравнений без нарушения адекватности этого дифференциального уравнения? Ответ на этот вопрос прост. Мы, вообще говоря, вовсе не отказываемся от теории дифференциальных уравнений, наоборот, мы просто стремимся расширить прикладные возможности этой теории.

Существующий еще со времен Ньютона и Лейбница классический математический подход, используемый при составлении дифференциальных уравнений, и по сей день остается в основном без изменений. Классический подход с тех давних пор применяется для математического моделирования движений твердых тел, процессов, происходящих в газах, жидкостях и в плазме (рассматриваются также смешанные случаи), в экономике, в военном деле и т.д. Однако невозможно утверждать, что мощь и универсальность классического подхода непоколебима. Ибо, хорошо известны трудности принципиального характера, возникающие при математическом моделировании турбулентных явлений [2]. Мы надеемся, что идеи, излагаемые в этой работе, в недалеком будущем послужат основой для создания качественно нового математического подхода для более успешного математического моделирования турбулентных явлений (c2).

В самом процессе формирования идеи нового подхода для моделирования турбулентных явлений, выяснилось, что эта идея может оказаться полезной также для расширения прикладных возможностей классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Цель части IA работы заключается в ознакомлении читателя с идеями нового математического подхода именно на примере обыкновенных дифференциальных уравнений. В развиваемом в этой работе новом подходе предлагается осуществлять некоторые изменения в самой фундаментальной основе классического математического подхода. При этом сам классический подход остается частным предельным случаем нового подхода.

Прежде чем приступать к описанию идеи нового подхода, нам нужно указать на два базисные положения, которые как нечто естественное и по умолчанию используются в классическом математическом подходе при составлении дифференциальных уравнений. Наш подход основан на некоторой версии расширения именно этих положений.

Комментарии к введению:

1. При выводе какого-либо дифференциального уравнения важнейшим условием является требование обеспечения *адекватности*, т.е. соответствия между уравнением и исследуемым процессом. Здесь соответствие означает, что решения уравнения должны приемлемо точно отражать значимые для нас характеристики процесса. Без этого соответствия, считается, что уравнение неадекватно описывает процесс, т.е. не пригодно для описания процесса. На практике для начала проверки степени адекватности уравнений лучше всего подходят известные их точные решения. Однако их не всегда удается найти. Поэтому приходится искать приближенные решения. Существует и комбинированный подход. Высоко ценятся работы, в которых применяют теорию групп Ли [4], [6], [11], а также, наряду с этим, применяют и теорию приближенных решений. Найденные точные решения (эти решения инвариантны относительно допускаемой уравнением непрерывной группы преобразований) сами по себе весьма ценные и, кроме этого, позволяют путем сравнения оценить качество применения выбранного приближенного метода.

2. По-видимому, исторически так уж сложилось, что идеи, о которых идет речь, до наших дней остались практически незаметными, возможно, из-за ослепительно яркого фона блестящих успехов, которым мы давно обязаны теории дифференциальных уравнений. Хотя, по-видимому, эти идеи, в некотором смысле по умолчанию и часто не очевидным образом на деле были востребованы при нахождении приближенных решений.

2. Используемые часто по умолчанию базисные положения в классическом математическом подходе.

Эти положения в большой степени связаны с дефинициями, которыми по умолчанию наделяются в классическом математическом подходе понятие *материальной точки*. Понятие материальной точки универсально и обычно используется при математическом моделировании поведения твердых тел, жидкостей, газов, плазмы и т.д. Материальная точка – эта обычная математическая точка (геометрическая точка в смысле определения Эвклида [5, р.248] (с3)) с отнесённым к ней каким-либо физическим параметром (масса, заряд, плотность, давление, температура и т.д.). При описании поведения какого-либо объекта можно использовать одну, несколько или большое множество материальных точек.

Например, при моделировании поступательно криволинейного движения твердого тела часто используется одна *выбранная* материальная точка.

Считается, что это выбранная точка *жестко связана* с твердым телом (т.е. по ходу времени остается абсолютно неподвижной относительно твердого тела) и обычно может находиться внутри этого тела (часто стараются совмещать с центром тяжести или центром массы твердого тела).
В результате, при поступательно криволинейном движении твердого тела любая другая жестко связанная с твердым телом точка, находится по ходу времени на неизменном расстоянии от выбранной материальной точки и, значит, описывает в пространстве траекторию, параллельной траектории исходно выбранной точки. Таким образом, часто, зная в каждый момент времени координаты и мгновенные скорости (фазовое состояние) одной выбранной точки твердого тела мы узнаем поведение всех точек этого тела. Это наблюдение оказывается достаточной мотивацией для начала выведения дифференциального уравнения движения только для одной выбранной материальной точки, поскольку при этом движения всех остальных точек твердого тела обычно становятся известными. Схожая ситуация возникает при выводе уравнений движения (поведения) для ламинарных потоков жидкости или газа.
Однако для турбулентных потоков ситуация коренным образом меняется. Утверждать, что любые две соседние материальные точки в таком потоке всегда опишут параллельные линии тока невозможно (иначе, поток оказался бы не турбулентным, а ламинарным). В турбулентном потоке близкие линии тока могут допускать различные завихрения, могут потерять свойство непрерывности, становясь даже точечно разрывными (c4). Очевидно, что разрывные потоки исключают саму возможность употребления для их описания условий типа гладкости. А без соблюдения условий гладкости представляется затруднительным (а нередко даже невозможным) адекватное применение классического математического подхода для составления дифференциальных уравнений в целях моделирования таких потоков (c5).
Классические базисные положения, которые обычно по умолчанию используются при выводе дифференциальных уравнений:
I. При выводе дифференциальных уравнений, в конечном счете, либо не учитываются, либо же только косвенно и неполно учитываются линейные размеры (габариты) объекта, поведение которого исследуется (c6, c7 и c8).
II. Выбранная для вывода дифференциальных уравнений материальная точка предполагается жестко связанной только с одной точкой объекта (или потока), поведение которого по ходу времени намереваются математически моделировать, используя эту точку.
Обычно, именно путем явного или неявного выбора (т.е. часто лишь по умолчанию подразумевая состоявшимся выбор точки) жестко связанной с реальным физическим объектом (потоком) материальной точки осуществляется переход к научным изысканиям, позволяющим определять динамические или интересующие нас иные свойства этого объекта.

Определение 2.1. Материальную точку, выбранную в соответствии с положением II для математического исследования реального объекта (или потока), назовем *статическим идентификатором* этого объекта.

Например, в классическом математическом подходе координаты и мгновенные скорости реального твердого тела в каждый момент времени обычно определяются соответственно по координатам и мгновенным скоростям статического идентификатора этого тела.

Количество выбранных для вывода дифференциальных уравнений материальных точек, являющихся статическими идентификаторами для конкретного объекта, может быть больше единицы.

Очень важно отметить, что мы ограничиваемся рассмотрением только тех объектов, которые обладают в некотором конкретном рассматриваемом пространстве линейными размерами, не все из которых считаются нулевыми (с9). Приступим теперь к изложению нашего подхода.

Комментарии к разделу 2:

3. Напомним, что Эвклид определил понятие точки интуитивно, т.е. как нечто не имеющее частей. Гильберт при разрабатывании аксиоматики оснований геометрии сумел первым определить понятие точки без обращения к интуитивности [5].

4. Например, в общем случае из-за возможности появления разрывности в потоках, невозможно привлечь уравнения Навье - Стокса [8] или даже уравнение неразрывности для моделирования турбулентных потоков. Интересно, что при появлении в турбулентном потоке жидкости точечной разрывности может наблюдаться также явление свечения потока, которое обычно вообще не учитывается при моделировании. Явление свечения в турбулентных потоках горных рек впервые обнаружил В. Шаубергер [9]. Свечение в жидкости, называемое как *сонолюминисценция*, можно вызвать и искусственным путем, например, подвергая жидкость в емкости воздействию ультразвука [12].

5. Несмотря на отсутствие общепринятой физической модели для объяснения некоторых турбулентных явлений, некоторые математики предприняли интересный шаг. Например, авторы [10] для определения некоторых характеристик вихревой трубки Ранке [7], провели вычислительные эксперименты при предположениях, что течение воздуха ламинарное, осесимметрическое и воздух ведет себя как вязкий идеальный газ (т.е. удовлетворяет уравнению Клайперона). Предположено, что вихревое движение жидкости и газа можно описать уравнением Навье - Стокса. Авторы исходя из этого, а также используя соответствующие уравнения неразрывности и теплопроводности провели вычислительные расчеты (для случая жидкости использовали также уравнение несжимаемости). Выражая признательность авторам [10] за интересный с точки зрения вычислительной математики труд, отметим, что практически ни одно предположение, положенное в основу модели авторов, не имеет место. Сначала отметим, что сами авторы, ссылаясь на [3] отметили, что эксперименты не подтверждают осесимметричность вихревого течения воздуха в вихревой трубке. Далее, течение воздуха не является ламинарным, поскольку в этом течении толщина течения увеличивается по мере приближения к месту выхода нагретого газа (так как часть кинетической энергии воздуха переходит в теплоту и, следовательно, скорость течения по мере движения воздуха падает и, следовательно, соответственно уменьшается центробежная сила, прижимающая газ к внутренней стенке трубки Ранке). Кроме того, если исходить из экспериментальных наблюдений Шаубергера [9], то мы должны согласиться с тем, что частицы воздуха могут участвовать в сложных вращательных движениях, а не двигаться по простым спиралям, очерченным на внутренней стенке вихревой трубки (свойства, обнаруженные Шаубергером, относятся к воде, но реально можно предположить, что они проявться также в случае воздуха). Иначе говоря, вихревое течение воздуха в трубке является турбулентным. Для описания турбулентных течений многие специалисты, как и авторы [10], используют уравнение Навье - Стокса. Однако с адекватностью этого уравнения связаны некоторые серьезные проблемы, которые были обсуждены, например, в [2].

6. Изначально при выводе дифференциального уравнения нередко фиксируется некоторый объем рабочего тела (в технической термодинамике выражение “рабочее тело” часто означает вещество, находящийся в жидком или газообразном состоянии), т.е. принимается во внимание линейные размеры этого объема. Далее, учитывается влияния на этот объем воздействия различных факторов и составляется так называемое *уравнение баланса*. Затем, для получения из уравнения баланса дифференциального уравнения этот объем искусственно устремляют к нулю, превращая его в пределе в материальную точку. Более простым считается также отказ с самого начала от использования объема. Например, при выводе дифференциального уравнения колебаний маятника изначально маятник воспринимается в качестве подвешенной на нити материальной точки.

7. Поясним вторую часть I положения. Например, косвенный и неполный учет только одного из трех линейных размеров (в гидродинамике этот учитываемый размер принято называть *характерным диаметром*) осуществляется при определениях чисел Рейнольдса (Re), Фурье (Fo), Нуссельта (Nu) и др. Эти числа называются также критериями подобия. Они обычно считаются постоянными для каждого конкретно рассматриваемого процесса, что с математической точки зрения оправдано тогда, когда используемые для описания потока рабочего тела дифференциальное уравнение инвариантно относительно группы растяжений-сжатий по некоторым параметрам, входящим в определения этих чисел.

8. С математической точки зрения слово “объект” символизирует все то, что поведения которых уже математически моделированы или могут быть смоделированы дифференциальными или гибридными уравнениями.

9. В Римановом пространстве выражение “линейный размер” нужно заменить выражением “длина геодезического отрезка”, подразумевая что, этот отрезок геодезической имеет максимально возможную длину и не выходит за пределы рассматриваемого объекта.

3. Расширения базисных положений I и II.

Мы не отклоняем базисные положения, описанные выше, что, естественно, позволяет нам не ущемлять надежную связь с теорией дифференциальных уравнений. Расширения, о которых мы говорим, напрямую связаны с некоторым уменьшением степени идеализации (абстракции), присущей самой сути положений I и II. Как мы ниже увидим, при расширениях базисных положений I и II появляются качественно новые возможности.

3.1. Расширение положения I. Мы с самого начала учитываем линейные размеры объектов, поведения которых исследуются. Собственно, в этом и заключается суть *первой идеи* нового положения, которое назовем *базисным положением* **In**. Итак, классическое базисное положение I мы заменяем новым базисным положением In.

Принятое выше допущение о том, что каждый исследуемый объект обладает линейными размерами, означает, в частности, что каждый такой объект располагает некоторым объемом или, по крайней мере, включает в себе некоторый ненулевой объем (c10). Поверхность этого объема может иметь сложную форму и может сильно отличаться от объекта к объекту. Для придания универсальности нашему подходу, мы примем, что в общем случае объем каждого объекта целиком содержит ненулевой меньший объем некоторой стандартной формы (для всех объектов), обладающий поверхностью более простой структуры.

Определение 3.1.1. Выделенный ненулевой объем некоторой стандартной формы (форма определена ниже) будем называть *вложенным подобъемом* объекта в том случае, когда

1) этот объем в каждый момент времени *целиком содержится внутри объекта* (как множество, описанное в c10);

2) поверхность этого объема жестко связана с этим объектом, т.е. поверхность вложенного объема по ходу времени предполагается *неподвижной относительно этого объекта*.

Каждый объект имеет бесконечное множество вложенных подобъемов. Например, каждый объем, поверхность которого жестко связана с объектом, является вложенным подобъемом, если содержится (как множество, описанное в c10) внутри некоторого вложенного подобъема. Выберем стандартный тип объема для вложенных подобъемов.

При геометрическом выборе вложенного подобъема и, главное, стандартной формы его поверхности, у нас появляется некоторый произвол. Вложенный подобьем в принципе может быть в форме шара, куба, эллипсоида, параллелепипеда и т.д. Однако мы обыкновенно будем отдавать предпочтение вложенным подобъемам в форме *шара* (c11).

Определение 3.1.2. Пусть поведение некоторого объекта описывается обыкновенным дифференциальным уравнением и известны координаты начальной точки. Вложенный подобьем в форме шара назовем *вложенным шаром* при условии, что начальный момент времени центр этого шара совпадает с заданной начальной точкой.

Из определений 3.1.1 и 3.1.2 следует, в каждый момент времени поверхность вложенного шара (сфера) жестко связана с исследуемым объектом и каждая точка этого шара принадлежит объекту. Очевидно, что каждый объект обладает бесконечным множеством вложенных шаров с различными диаметрами.

Определение 3.1.3. Полагаем, что каждый конкретный объект в любом из всевозможных направлений в пространстве обладает некоторым измеряемым линейным размером (длиной). Минимальный из этих длин назовем *минимальным габаритом* объекта.

Согласно определениям 3.1.1–3.1.3, очевидно, что вложенный шар будет иметь максимальный по величине диаметр в том случае, когда его диаметр совпадает с минимальным габаритом соответствующего объекта.

Определение 3.1.4. Вложенный шар, диаметр которого равен минимальному габариту объекта будем называть *максимальным вложенным шаром*.

Очевидно, что определения 3.1.1–3.1.4 гарантируют, что точки любого вложенного шара не выходят за пределы соответствующего объекта, т.е. принадлежат этому объекту.

Известно, что измерения длин осуществляются некоторой погрешностью. Если не оговорено противное, то вложенный шар с диаметром равным удвоенной величине этой погрешности обычно будем рассматривать в качестве *минимального вложенного шара*.

Выбор вложенного шара для конкретного объекта в общем случае зависит от линейных размеров объекта и интересующей нас математической задачи, связанной с исследованием объекта. В общем случае, диаметр вложенного шара может быть описан переменной функцией времени (c12).

Иногда, количество выбранных вложенных шаров может быть больше единицы (c13).

Ниже, для наглядности изложения полагаем, что для некоторого объекта (для простоты в основном твердого тела) выбран только один вложенный шар с постоянным диаметром. Кроме того, мы начинаем изложение основной сути нового математического подхода с одномерного случая, поскольку для большей ясности мы стремились обойтись без приведения некоторых дополнительных тонкостей, характерных для более сложных случаев.

Комментарии к подразделу 3.1:

10. Говоря о вложенном подобъёме объекта, мы допустили некоторое сокращение. Т.е. на деле имеется ввиду расположенное внутри объекта односвязное измеримое множество, имеющий ту же среднюю плотность (приписываемой к этому объему), что и исходный объект. Стандартная форма (тип) поверхности вложенного подобъема уточнена в тексте. В случае твердых пустотелых объектов, мы допускаем использования воображаемых вложенных подобъемов, которым при необходимости можем приписать какую-либо плотность, например, ту же среднюю плотность, что имеет материал оболочки таких объектов.

11. Вообще то, для продолговатых объектов (т.е. таких объектов, длина которых намного больше их ширины), по-видимому, имеет смысл рассматривать параллелепипеды. Предпочтение, которое мы отдали шару при выборе типа собственного подобъема связано со следующими соображениями:

a. Выбор шара имеет геометрический подтекст. А именно, оказывается, что если понятие точки изначально определим в форме сферы с фиксированным диаметром, а понятие прямой линии в виде цилиндра с таким же диаметром, то аксиомы геометрии применительно к множеству таких точек – сфер и линий - цилиндров соблюдаются [5, p.44-46]. И мы получим иную интерпретацию для Эвклидовой геометрии.

b. Выбор шара имеет топологический подтекст. Для введения топологии понятие открытого шара (т.е. шара без сферы) обычно используют для определения фундаментальной системы окрестностей.

c. Наш выбор имеет некоторое отношение к важным теоремам о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных и физических параметров. Например, при отсутствии непрерывной зависимости трудно быть уверенным в том, что точка приближенного решения, не принадлежащая к траектории точного решения, может иметь какого-либо отношения к описываемому реальному процессу. Эти теоремы крайне ценны тем, что они в первую очередь помогают нейтрализовать трудности, вызванные существованием погрешностей в самом процессе измерения, практически неизбежного в случаях реальных приложений. Можно ожидать, что в некоторых случаях значимость предлагаемого подхода еще более возрастет, если в качестве радиуса для вложенного шара мы выберем число, который окажется минимальным среди погрешностей, допускаемых при определении точного местоположения начальной точки в реальном объекте. В случае, когда $I = I(t),\ t \in T$, является *минимальным вложенным отрезком* (т.е. одномерным минимальным вложенным шаром), мы, почти что находимся в условиях применения классического случая, поскольку длина минимального вложенного отрезка мизерна и равна удвоенной величине существующей погрешности измерения.

12. Для твердых тел и ламинарных потоков жидкости или газа, видимо, можно ограничиться выбором вложенных шаров с постоянными диаметрами. Однако, для турбулентных потоков интереснее рассмотрение вложенных шаров с переменными диаметрами. Для турбулентных потоков могут представить интерес и такие сингулярные случаи, когда вложенный шар, уменьшаясь в диаметре, схлопывается в точку. Например, в жидкости при таком реальном схлопывании воздушного пузырька наблюдается упомянутый в (с4) эффект сонолюминисценции.

13. Такая необходимость, как правило, возникает тогда, когда по ходу движения объекта различные части одного объекта могут совершать движения относительно друг друга.

3.2. Подготовка к расширению положения II. Многомерный вложенный шар в одномерном случае превращается (редуцируется) в отрезок прямой с длиной равной диаметру этого шара. При этом поверхность шара (сфера) редуцируется в две *крайние точки* данного отрезка прямой, а центр шара становится его *серединной точкой*.

Определение 3.2.1. Вложенный шар в одномерном случае будем называть *вложенным отрезком* и обозначать буквой I .

Пусть движение объекта Ω рассматривается в течение времени $t \in T = [t_0, t_1]$. Очевидно, что тогда вложенный отрезок I , жестко связанный с движущимся объектом Ω, также будет совершать соответствующее движение, которое обозначим операторным равенством: $I = I(t),\ t \in T$.

Из определений 3.1.1, 3.1.2 и 3.2.1 вытекает, что по ходу времени $t \in T$ крайние точки вложенного отрезка $I(t)$ сохраняют жесткую связь с объектом Ω и каждая точка этого отрезка принадлежит объекту. Кроме двух крайних точек вложенного отрезка, у нас есть еще одна точка, которая также жестко связана с объектом. Эта материальная точка является статическим идентификатором объекта (определение 2.1).

Статический идентификатор в начальный момент времени t_0 совпадает с начальной точкой x_0, т.е. с той точкой, в которой считается (в силу абстракции, отмеченной в положении II), что находится объект Ω в момент времени t_0. Согласно определениям 3.1.2 и 3.2.1 в момент времени t_0 серединная точка вложенного отрезка $I(t_0)$ также совпадает с начальной точкой x_0. Итак, в начальный момент времени t_0 вложенный отрезок содержит начальную точку x_0, которая делит его на две равные части.

Пусть движение статического идентификатора объекта происходит начиная с точки x_0 по некоторой гладкой траектории $x = \hat{x}(t),\ t \in T$. Тогда, в силу имеющихся жестких связей (между объектом и крайними точками вложенного отрезка, а также его серединной точкой), в любой момент времени $\bar{t} \in T$ вложенный отрезок $I(\bar{t})$ пересечет траекторию $x = \hat{x}(t)$ в точке с ординатой $\hat{x}(\bar{t})$ и будет делить этот отрезок на две равные части.

Иначе говоря, для исследования поведения реального объекта, мы сможем избрать, наряду с материальной точкой (статическим идентификатором этого объекта) также вложенный отрезок, серединная точка которого совпадает с этой материальной точкой. Итак, благодаря выше упомянутым жестким связям, сам вложенный отрезок можно рассмотреть в качестве нового статического идентификатора объекта.

3.3. Параллельные траектории. То, что вложенный отрезок для реального объекта в принципе можно рассматривать в качестве нового статического идентификатора означает выполнение следующего условия:

Пусть, в соответствии с классическими положениями I и II, движение объекта Ω начиная с начальной точки x_0 единственным образом описывается некоторой гладкой траекторией (функцией) $x = \hat{x}(t)$, $\hat{x}(t) = x_0$, $t \in T$ (c14). Произвольным образом выберем некоторую точку вложенного отрезка $I(t_0)$, не совпадающую с его серединной точкой x_0. Будем считать, что выбранная точка имеет жесткую связь с вложенным отрезком, т.е. по ходу времени не меняет своего положения относительно вложенного отрезка. Очевидно, что при движении вложенного отрезка и жестко связанной с ним выбранной точки расстояние между этой точкой и соответствующей серединной точкой вложенного отрезка будет неизменным при любых значениях времени. Сказанное означает, что начиная с момента времени t_0 произвольная точка вложенного отрезка, неподвижная относительно этого отрезка (т.е. жестко связанная с отрезком), будет описывать траекторию, которая окажется параллельной траектории $x = \hat{x}(t)$, $t \in T$. Иначе говоря, при движении объекта, а значит и вложенного отрезка, исходящая в начальный момент времени из любой фиксированной (жестко связанной, закрепленной) точки вложенного отрезка $I(t_0)$ траектория может получена из траектории $x = \hat{x}(t)$, $t \in T$, путем соответствующего сдвига. Продемонстрируем сказанное.

Пусть на плоскости введена *двумерная декартовая координатная система* (где координатная ось абсцисс есть ось времени, а ось ординат предназначена, как обычно, для отмечания значений функций от времени). Далее, пусть поведение объекта Ω в промежутке времени T моделировано (классическим способом, т.е. исходя из положений I и II) обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$d/d\, x(t) = f\left(x(t), t\right),\ t \in T, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$\hat{x}(t) = x_0. \qquad (2)$$

Здесь функция f предполагается непрерывной на отрезке T.Пусть уже упомянутая выше функция $x = \hat{x}(t)$, $\hat{x}(t) = x_0$, $t \in T$, является единственным решением задачи Коши (1), (2) и Δ равна половине длины вложенного отрезка. Тогда, очевидно, что траектория, параллельная траектории $x = \hat{x}(t)$,

$t \in T$, получается от этой траектории с помощью следующего поточечного сдвига:

$$z_{\mu}(t) = \hat{x}(t) + \mu \Delta , \qquad (3)$$

где μ – постоянное число, $|\mu| \le 1$, $z_{\mu}(t)$ – параллельная траектория, соответствующая значению параметра сдвига μ , $t \in T$.

Определение 3.3.1. Совокупность точек всех траекторий $\{z_{\mu}(t), t \in T, |\mu| \le 1\}$, исходящих из всевозможных точек вложенного отрезка $I(t_0)$ назовем *следом движения* (*полосой движения)* вложенного отрезка объекта Ω .

Следующие три леммы можно доказать на основе формулы сдвигов (3).

Лемма 3.3.1. Из каждой точки следа движения проходит только одна траектория, параллельная траектории $x = \hat{x}(t)$, $\hat{x}(t) = x_0$, $t \in T$.

След движения (полоса движения) является как бы следом движения вложенного отрезка объекта Ω . А движение вложенного отрезка, в силу обозначенных выше жестких связей, однозначно определяется хотя бы по движению его серединной точки.

Определение 3.3.2. Гладкую траекторию $z_0(t) = \hat{x}(t)$, $t \in T$, серединной точки вложенного отрезка объекта, назовем *центральной* траекторией следа движения.

Ясно, что решение задачи (1), (2) определяет центральную траекторию.

Лемма 3.3.2. Траектории из следа движения, параллельные центральной траектории являются гладкими траекториями.

Определение 3.3.3. Всевозможные траектории из следа движения, параллельные центральной траектории, назовем *параллельными траекториями* из полосы движения.

Определение 3.3.4. Две траектории $z_1(t)$ и $z_{-1}(t)$, $t \in T$, определяющие границы следа движения вложенного отрезка назовем *граничными траекториями*.

Лемма 3.3.3. Параллельные траектории из следа движения в каждый фиксированный момент времени имеют параллельные между собой касательные.

Это означает, что параллельные траектории из следа движения в каждый момент времени имеют *одинаковые производные*, или, с учетом физического смысла производной, можно утверждать, что любые точки при движениях на параллельных траекториях имеют *одинаковые мгновенные скорости* движения в каждый фиксированный момент времени (с15).

Приведем два простых свойства параллельных траекторий (они вытекают из (3)).

1. Формула связи между параллельными траекториями:

$$z_{\mu-\varepsilon}(t) = z_{\mu}(t) - \varepsilon\Delta \quad \forall t \in T .$$

Здесь $\mu \in R^1$, $|\mu| \le 1$, $\varepsilon \in R^1$ и $|\mu - \varepsilon| \le 1$.

2. Формула связи между начальными и текущими точками двух параллельных траекторий:

$$z_{\mu_1}(t_0) + z_{\mu_2}(t) = z_{\mu_1}(t) + z_{\mu_2}(t_0) \quad \forall t \in T .$$

Здесь $\mu_n \in R^1$, $|\mu_n| \le 1$, $n = 1,2$.

Выше, говоря о параллельных траекториях, описываемых точками вложенного отрезка, мы подчеркивали, что эти точки фиксированы (закреплены) на этом отрезке, т.е. жестко связаны с ним или, что, то же самое, по ходу времени неподвижны относительно вложенного отрезка, а значить, неподвижны также относительно объекта Ω. Суть *второй идеи* нового подхода зиждется в констатации необязательности некоторых из этих жестких связей. Теперь, мы будем не только допускать, но и активно использовать то новое положение, что точка являющаяся статическим идентификатором для исследуемого объекта Ω может потерять свою жесткую связь с Ω, т.е. совершать по ходу времени движение не только вместе с объектом Ω, но и двигаться внутри самого объекта Ω.

Комментарии к подразделу 3.3:

14. Гладкость, как обычно, означает, что функция $x = \hat{x}(t)$ является непрерывно-дифференцируемой на интервале (t_0, t_1), а в граничных точках имеет непрерывные с левой и правой сторон производные соответственно.

15. Сказанное верно и при рассмотрении вращательного движения, если мы в этом случае под мгновенной скоростью движения будем понимать мгновенную угловую скорость. В этом случае параллельными траекториями являются концентрические окружности, а линейная мгновенная скорость движения на каждой такой окружности определяется как обычно умножением соответствующей (данному моменту времени) мгновенной угловой скорости на радиус этой окружности.

3.4. Расширение положения II. Введем второе базисное положение, которое вместе с положением In составляют основу для нового математического подхода.

IIn. В начальный момент времени t_0 выберем произвольную материальную точку A вложенного отрезка $I(t_0)$ любого объекта Ω, $A \in I(t_0) \subset \Omega$. Считаем, что жесткая связь между вложенным отрезком $I = I(t)$ и объектом Ω по ходу времени $t \in T$ по-прежнему сохраняется. Однако жесткая связь между точкой A и вложенным отрезком $I = I(t)$ по ходу времени t не является обязательной. Точку A можно использовать для моделирования поведения (движения) объекта Ω.

Положениями In и IIn мы вносим качественные изменения в основы классического подхода. В соответствии с положениями In и IIn для того чтобы знать *местоположение* (*координаты*) объекта Ω в любой момент времени t достаточно знать координаты не обязательно заранее фиксированной точки объекта Ω, как в случае положений I и II, а хотя бы одной произвольной точки A объекта Ω, причем вне зависимости от того: имеет или не имеет эта точка жесткую связь объектом Ω (естественно, не забывая при этом, что в каждый момент времени $t \in T$ сам объект Ω для нас представляется посредством вложенного отрезка $I(t)$).

Для определения мгновенной скорости твердого тела мы обычно будем отдавать предпочтение либо классическому способу, т.е. использовать по факту мгновенную скорость статического идентификатора тела, либо же использовать тот факт, что каждая точка следа движения принадлежит только одной параллельной траектории (с16).

Очевидно, что чем меньше длина 2Δ вложенного отрезка объекта, тем больше мы приближаемся к классическому подходу. Следующее утверждение очевидно.

Теорема 3.4. Новый подход, развиваемый на основе положений In и IIn совпадает в пределе $\Delta \to 0$ с классическим подходом, построенным на основе положений I и II.

Определение 3.4. Материальную точку A, выбранную для математического исследования физического объекта (или потока) Ω в соответствии с положениями In и IIn, назовем *динамическим идентификатором* этого объекта.

Таким образом, динамический идентификатор одновременно может участвовать в двух движениях, собственно в движении вместе с объектом Ω, а также в движении внутри этого объекта.

Комментарий к подразделу 3.4:

16. Согласно лемме 3.3.1 и определению 3.3.3 в произвольный момент времени $t \in T$ из любой точки вложенного отрезка $I(t)$ проходит только одна параллельная траектория. Мгновенная скорость объекта в момент времени $t \in T$ можно определить, используя именно эту параллельную траекторию (для вращательного движения с учетом с15). Так как согласно лемме 3.3.3 все параллельные траектории из следа движения (и центральная траектория) в каждый момент времени имеют одинаковые касательные.

4. Универсальные решения.

В силу произвола выбора динамического идентификатора A из вложенного отрезка $I(t_0)$, а также произвола движения этой точки по ходу времени на подвижном вложенном отрезке $I(t),\ t \in T$, результирующее движение точки A в полосе движения может описываться любой траекторией (непрерывной, гладкой, кусочно-постоянной, кусочно-непрерывной и даже точечно-разрывной и т.д.).

Определение 4.1. Любую траекторию динамического идентификатора A (изначально произвольно выбранной согласно положению IIn) в следе движения назовем *универсальной траекторией* задачи (1), (2). Функцию, описывающую универсальную траекторию назовем *универсальным решением* задачи (1), (2).

Определение 4.2. Функцию $\mu = \mu(t)$, удовлетворяющую неравенству $|\mu(t)| \le 1$, $t \in T$, назовем *функцией управления* или иногда *управлением*.

Универсальные траектории можно описать следующей формулой поточечных сдвигов:

$$z_\mu(t) = \hat{x}(t) + \Delta\mu(t), \tag{4}$$

где $\mu = \mu(t)$ – функция управления, $t \in T$.

Если функцию управления $\mu = \mu(t)$ не фиксировать, то классическому решению задачи (1), (2) можно сопоставить бесконечное множество универсальных решений $z_\mu(t)$, $t \in T$. Координаты каждой точки любого универсального решения несет информацию о местоположении объекта Ω, поскольку все траектории таких решений принадлежать следу движения. Универсальными траекториями можно описать и приближенные решения этой же задачи (с17).

Если управления – постоянные функции, то формула (4) совпадает с (3), и тогда универсальные траектории описывают параллельные траектории. В частности, справедливо равенство: $z_0(t) = \hat{x}(t)$, $t \in T$, т.е. точное решение задачи (1), (2) само является одним из универсальных решений. Если функции управления кусочно-непрерывные, то соответствующие универсальные траектории согласно (4) будут кусочно-непрерывными. В случае, когда функции управления точечно-разрывные, то соответствующие им универсальные траектории также являются точечно- разрывными. Список универсальных траекторий можно продолжить.

Подробнее остановимся на гладких универсальных решениях. Если управление $\mu = \mu(t)$ – гладкая функция, то она посредством формулы сдвигов (4) определяет в следе движения объекта гладкое универсальное решение. Используя (1), (2) и (4) всевозможные гладкие универсальные решения $z_\mu(t)$ легко можно описать следующим семейством дифференциальных уравнений

$$d\,z_\mu(t)/d\,t = f\left(z_\mu(t) - \Delta\mu(t), t\right) + \Delta\, d\mu(t)/d\,t, \tag{5}$$

с начальным условием

$$z_{\mu}(t_0) = x_0 + \Delta\mu(t_0). \tag{6}$$

Здесь $\mu = \mu(t)$ – произвольная гладкая функция управления, $t \in T$.

Определение 4.3. Для любых гладких функций управления $\mu = \mu(t)$ уравнение (5) назовем *универсальным уравнением*, а задачу (5), (6) назовем *универсальной задачей Коши*, соответствующей задаче Коши (1), (2).

Из (5), (6) при постоянных функциях управления $\mu = \mu(t) \equiv const$, получим дифференциальное уравнение для описания параллельных траекторий:

$$d\, z_{\mu}(t) / d\, t = f\left(z_{\mu}(t) - \Delta\mu, t\right),\ t \in T, \tag{7}$$

с начальным условием

$$z_{\mu}(t_0) = x_0 + \Delta\mu \tag{8}$$

На этом мы завершаем обсуждение идей об увеличении прикладных возможностей теории дифференциальных уравнений. *Сам факт, что движение динамического идентификатора внутри объекта мы сможем задавать сами, путем зависящего только от нас выбора функции управления, очевидно, создает качественно новые возможности для проведения исследований.* Эти, на наш взгляд, перспективные исследования возможно провести по пути решения, например, следующих проблем:

Проблема 1. Какое движение должен совершать динамический идентификатор в пределах вложенного отрезка, чтобы описываемая этой точкой универсальная траектория имела более простую структуру по сравнению с центральной траекторией?

Проблема 2. Какое из всевозможных универсальных траекторий наилучшим образом может удовлетворять какому-либо известному вариационному принципу или критерию качества, или же, наилучшим образом отвечает законам физики, имеющим отношение к конкретному исследуемому процессу?

Возникают и другие необычные возможности, например, такие, которые позволяют даже точечно-разрывные функции принять в качестве нового типа универсальных решений для уравнения исследуемого процесса (что представляется полезной при описании турбулентных явлений) (c18). В связи с этим целесообразно сформулировать еще одну проблему.

Проблема 3. Используя создавшиеся на основе положений In и IIn качественно новые возможности, каким образом можно адекватно (c1) математически моделировать турбулентные явления?

Комментарии к разделу 4:

17. Если точка A не имеет жесткой связи с вложенным отрезком $I(t)$, длина которой не превышает наперед заданное малое число $\varepsilon > 0$, и в начальный момент времени t_0 совпадает с начальной точкой x_0, то мы имеем дело с классическим случаем. В этом случае, в результате композиции движений вложенного отрезка и точки A получается универсальная траектория, которая, по сути, является *приближенной траекторией* движения объекта Ω. В самом деле, в случае наличия такой жесткой связи, траектория приближенного решения будет одной из
параллельных траекторий из следа движения. Это, вместе с тем, что начальной точкой приближенного решения является точка x_0, означало бы, что приближенное решение совпадает с единственным точным решением, что в общем случае неверно.

18. Помимо плюсов в некоторых случаях новый подход по сравнению с классическим подходом обладает и недостатками. Например, в описания движения
твердых тел с выбором статического идентификатора объекта мы обычно располагаем информацией о расположении различных точек объекта относительно этого идентификатора. Эта информация по ходу времени нередко не изменяется из-за существующей жесткой связи между самим объектом и идентификатором. Однако эти изменения иногда происходят и в классических задачах, например, в задачах с изгибом или деформацией твердого тела.

5. Выводы.

Математический подход, основанный еще со времен Ньютона и Лейбница на базисных положениях I и II (обычно используют по умолчанию, раздел 2) не достаточно приспособлен для приемлемо адекватного описания дифференциальными уравнениями турбулентных явлений. Для выхода из этой ситуации в работе введены новые базисные положения In и IIn (раздел 3), которые в частном предельном случае совпадают с положениями I и II. В новых положениях активно учитываются линейные размеры объектов. Любая траектория, принадлежащая следу движения «размерного» объекта в пространстве, называется универсальной траекторией. Вводиться понятие функции управления, по зависящему от нас выбору и которой однозначно определяется универсальное решение (через формулу поточечного сдвига

(4)). Сформулированы три, на наш взгляд, важные проблемы (раздел 4). Решения этих проблем подразумевают активного использование понятия универсального решения (раздел 4), избавляющего нас от “проклятия” негладкости, столь затрудняющего изучение классическим подходом турбулентные явления. Универсальными решениями можно описать не только гладкие, но и вообще любые мыслимые типы траекторий из следа движения объекта. При изучении проблемы 1 подтвердилось, что понятия универсального решения и функции управления действительно открывают качественно новые возможности для расширения прикладного значения классической теории дифференциальных уравнений. Из-за нехватки места некоторые из полученных в этом направлении результатов мы приведем в следующей части IB, являющейся непосредственным продолжением части IA. Часть из этих результатов ранее были опубликованы в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Akhundov A.A., Akhundova E.M. On the impact of a change in status the notion of a mathematical point in describing the solutions of differential equations / Materials of Scientific Conf. "Modern problems of applied mathematics”, BQU, Baku, 2002, pp.33-36.
2. Akhundov A.A., Akhundova E.M. One the problem of mathematical modeling of the movement of the air flow in the tube Ranke-Hilsh, The 6th Inter. Conf. on COIA, Proceedings of the 6th international conference on Control Optimization and Industrial Applications, Baku, V.II, 2018, pp.47–49.
3. Arbuzov V.A., Dubnishev Y.N., Lebedev A.V. et al. Supervision of large-scale hydrodynamic structures in a vortical tube and effect Ranque, Letters in JTF, V.23, N.23, 1997, pp.84-90.
4. Ibraqimov N.X. Transformation groups in mathematical physics. M.: Nauka, 1983, 280 p.
5. Kaqan V.F. Essays on geometry, University of Moscow, 1963, 560 p.
6. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. M.: Mir, 1989, 639 p.
7. Ranque G.J. The Patent of USA, №1952281, 1934.
8. Rashevskiy P.K. Riemannian geometry and tensor analysis. M., Nauka, 1967, 664 p.
9. Schauberger V. Energy evolution. M. Eksmo-Yauza, 2007, 320 p.
10. Tarunin E.L., Alikina O.N. Computing experiments for vortical tube Ranque – Hilsh / Proceedings of Inter. Conf. RDAMM, V.6, part 2, 2001, p.363-371.
11. Zaytsev V. F. Introduction to the modern group analysis (p.2). S-Peterburg: QPTU, 1996, 40 p.
12. https://en.wikipedia.org/wiki/Sonoluminescence

IDEAS FOR INCREASING THE APPLICABILITY OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
PART IA. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

A.A. Akhundov[1], E.M. Akhundova[1]

[1]Institute of Control Systems of ANAS, Baku, Azerbaijan

e-mail: akhundov_a@rambler.ru , ema1948@mail.ru

ABSTRACT

In the theory of differential equations, the classical mathematical approach, based since the time of Newton and Leibniz on certain basic positions, is not very suitable for an acceptable adequate description of turbulent phenomena. To correct this situation, new basic positions have been introduced in the work, which in the particular limiting case coincide with the classical positions. The new positions more fully take into account the linear dimensions of objects. Any trajectory (even point-discontinuous) that belongs to the motion track of a "dimensional" object in space is called a universal trajectory. The concept of a control function is introduced, according to our choice of which the universal solution of the differential equation is uniquely determined. Three, in our opinion, important problems are formulated in the work on the basis of new opportunities that have opened in connection with this. The solutions to these problems involve the active use of the concept of a universal solution, which saves us from the "curse" of nonsmoothness, which makes the study of turbulent phenomena so difficult. In the study of the first problem, it was confirmed that the concepts of a universal solution and control functions open up qualitatively new possibilities also for expanding the applied value of the classical theory of ordinary differential equations. Part of the results obtained in this direction have been published [1]. We present these results in the next part of IB.

Keywords: Turbulent flow, Differential equation, Basic positions, Trace of movement an object, Inserted volume, Universal trajectories and solutions.

REFERENCES

1. Akhundov A.A., Akhundova E.M. On the impact of a change in status the notion of a mathematical point in describing the solutions of differential equations / Materials of Scientific Conf. "Modern problems of applied mathematics", BQU, Baku, 2002, pp.33-36.
2. Akhundov A.A., Akhundova E.M. One the problem of mathematical modeling of the movement of the air flow in the tube Ranke-Hilsh, Proceedings of the 6th international conference on Control Optimization and Industrial Applications, v.II, 2018, p.47 – 49.
3. Arbuzov V.A., Dubnishev Y.N., Lebedev A.V. et al. Supervision of large-scale hydrodynamic structures in a vortical tube and effect Ranque // Letters in JTF, 1997, v.23, №23, p. 84-90.
4. Ibraqimov N.X. Transformation groups in mathematical physics. M.: Nauka, 1983, 280p.
5. Kaqan V.F. Essays on geometry. University of Moscow, 1963, 560p.
6. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. M.: Mir, 1989, 639p.
7. Ranque G.J . The Patent of USA, №1952281, 27. 05.1934.
8. Rashevskiy P.K. Riemannian geometry and tensor analysis. M., Nauka, 1967, 664p.

9. Schauberger V. Energy evolution. M. Eksmo-Yauza, 2007, 320p.
10. Tarunin E.L., Alikina O.N. Computing experiments for vortical tube Ranque – Hilsh / Proceedings of Inter. Conf. RDAMM, v.6, part 2, 2001, p.363-371.
11. Zaytsev V. F. Introduction to the modern group analysis (p.2). S-Peterburg: QPTU, 1996, 40p.
12. https://en.wikipedia.org/wiki/Sonoluminescence